

Problème 451 – L'enveloppe de la flamme olympique de Paris 2024

Niveaux : Terminale (Spécialité Maths)

Chapitres : Fonction exponentielle, Limites, Convexité

Inédit, publié le 08/05/2024



Allumée selon la tradition à Olympie en Grèce et arrivée en France à Marseille en ce 8 mai 2024, la flamme olympique des Jeux de Paris 2024 est transportée dans une torche dont le design a été confiée au français Mathieu Lehanneur. Faite d'acier, haute de 70 cm, large en son centre de 10 cm et de 3,5 cm à ses extrémités, elle est parfaitement symétrique tant horizontalement que verticalement. Dans ce problème, on va s'intéresser à la courbe de cette magnifique torche en essayant de la modéliser tant que possible avec une expression simple... pour montrer que ce n'est pas si évident !

On a repris en **Annexe** l'image de cette torche, et on l'a tournée horizontalement, pour la placer au centre d'un repère orthonormé où l'unité est le cm. On a tracé les deux courbes, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses, qui forment l'enveloppe de la flamme : on précise qu'on a, pour simplifier, ignoré volontairement la présence des petites légères ondelettes visibles à la surface dans la zone brillante.

Pour ce problème, on va uniquement se concentrer sur la courbe supérieure, notée \mathcal{C} , et on va essayer de trouver une expression simple de la fonction f associée. Selon les données associées à la torche, on doit respecter, dans un premier temps, les contraintes suivantes :

- \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- $f(0) = 5$ (puisque la torche est large en son centre de 10 cm)
- $f(35) = f(-35) = 1,75$ (puisque la torche est large aux extrémités de 3,5 cm)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

On admet que f doit être continue et dérivable au moins deux fois sur \mathbb{R} .

1) Montrer que $f'(0) = 0$.

2) En étudiant la limite en $+\infty$, montrer que f ne peut pas être une fonction polynomiale.

3) On essaye d'exprimer f sous la forme d'une fonction de la forme $f(x) = Ae^{P(x)}$, où A est une constante et $P(x)$ une fonction polynomiale.

a) Supposons qu'on a $P(x) \neq 0$.

Montrer qu'on peut se ramener à un cas équivalent de la forme $f(x) = 5e^{Q(x)}$ où $Q(x)$ est une fonction polynomiale avec $Q(0) = 0$.

b) On suppose que $Q(x)$ est de degré 1, c'est-à-dire de la forme ax avec $a \in \mathbb{R}$.

En dérivant f , montrer que a est nul, et donc que f est une fonction constante qui ne conviendrait pas.

c) On suppose maintenant que $Q(x)$ est de degré 2, donc de la forme $a'x^2 + b'x$ avec $a', b' \in \mathbb{R}$

i. Montrer que $b' = 0$.

ii. Montrer que $a' = \frac{\ln(0,35)}{0,1225}$, puis en déduire l'expression complète de $f(x)$.

4) Si on tente de tracer une courbe à partir de l'expression trouvée en 3.c), on peut trouver qu'elle est relativement proche de la courbe \mathcal{C} , sans toutefois être parfaite. On tente alors d'améliorer l'expression recherchée en remarquant que la courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion en $x = 20$.

Calculer $f''(x)$ à partir de l'expression trouvée en 3.c) et montrer que celle-ci ne respecte pas la condition supplémentaire.

5) a) En étudiant les limites en $+\infty$ ou $-\infty$, montrer que si f est de la forme $f(x) = 5e^{Q(x)}$, alors forcément le degré de $Q(x)$ est pair.

b) En déduire qu'une fonction f de la forme $f(x) = 5e^{Q(x)}$, qui respecterait toutes les conditions énoncées, en y ajoutant celle de la question 4), ne pourrait convenir que si le degré de $Q(x)$ est pair et supérieur ou égal à 4.

Annexe

